

Функция Эйлера $\varphi(n)$ находит количество чисел от 1 до n , взаимно простых с n .

1. Докажите, что $\varphi(a) \cdot \varphi(b) = \varphi(ab)$ для любых двух взаимно простых натуральных чисел a и b .

2. Выведите формулу для $\varphi(p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k})$.

3. **Теорема Эйлера.** Докажите, что $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ для любых взаимно простых натуральных чисел a и n .

4. Докажите равенство $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$.

Пусть $\text{НОД}(a, n) = 1$, наименьшее натуральное число d такое, что $a^d \equiv 1 \pmod{n}$ называется *порядком* числа a по модулю n и обозначается $\text{ord}_n(a)$.

5. Докажите, что, если $a^d \equiv 1 \pmod{n}$, то $d : \text{ord}_n(a)$.

6. Докажите, что $2^{n!} - 1 : n$ для всех нечётных $n \in \mathbb{N}$.

7. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел n таких, что по крайней мере одно из чисел $2^{2^n} + 1$ и $6^{2^n} + 1$ является составным.

8. Найдите все $n \in \mathbb{N}$ такие, что $2^n - 1 : n$.

9. Найдите все $n \in \mathbb{N}$, при которых $\frac{n^{3n-2}-3n+1}{3n-2} \in \mathbb{Z}$.

10. Найдите все $n \in \mathbb{N}$ такие, что $2^{n-1} + 1 : n$.

11. **Полезная лемма.** Пусть $\text{НОД}(a, b) = 1$ и число p простое. Докажите, что каждый простой делитель дроби $\frac{a^p - b^p}{a - b}$ либо равен p , либо даёт остаток 1 при делении на p .

12. Даны последовательности (a_n) натуральных чисел и (p_n) простых чисел такие, что для каждого $n \geq 1$ выполнены условия: $p_n | a_n$ и $a_{n+1} = \frac{a_n}{p_n} (p_n^{1009} - 1)$. Докажите, что в последовательности a_n найдётся число, кратное 2018.

13. Бесконечное множество $S \subset \mathbb{N}$ назовём *хорошим*, если для любых трёх попарно различных элементов a, b и c множества S все натуральные делители числа $\frac{a^c - b^c}{a - b}$ принадлежат S . Докажите, что для каждого натурального числа $n > 1$ существует хорошее множество, не содержащее n .