

1. Дан двудольный граф с долями A и B . Докажите, что паросочетание из A в B существует, если и только если для любого набора вершин доли A их количество не превышает количество вершин их окружения.
2. Даны два семейства $\{A_1, \dots, A_n\}$ и $\{B_1, \dots, B_n\}$ непустых множеств, таких что $X = \bigsqcup_{i=1}^n A_i = \bigsqcup_{i=1}^n B_i$. Докажите, что множество $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$, такое что: 1) $x_i \in A_i$ при всех $i = \overline{1, n}$ и 2) $x_{\sigma(i)} \in B_i$ при всех $i = \overline{1, n}$ для некоторой перестановки σ ; существует тогда и только тогда, когда для каждого $m = 1, 2, \dots, n$, объединение любых m множеств из A содержит не более m множеств из B .
3. У Пети есть два листа бумаги размера 10×10 . Вася расчертил их на 100 многоугольников равной площади, а после положил один лист поверх другого. Докажите, что Петя сможет воткнуть 100 булавок так, чтобы проколоть все многоугольники.
4. В двудольном графе степень всех вершин равна k . Докажите, что существует правильная раскраска его рёбер в k цветов.
5. Есть натуральные числа $k \leq m < n$. В графе G степени всех вершин не менее m и не более n . Докажите, что можно удалить несколько рёбер так, чтобы степени стали не менее $m - k$ и не более $n - k$.
6. Таблица $m \times n$, $m \leq n$, называется *латинским прямоугольником*, если элементы каждой строки этой матрицы образуют перестановку чисел от 1 до n и в каждом столбце все числа разные. Докажите, что в любой латинский прямоугольник можно дописать несколько строк так, что он станет латинским квадратом.

7. Одинокруговой турнир по теннису, в котором участвовало $2n$ команд, длился $2n - 1$ день, причём каждая из команд играла ровно одну игру в день. Всегда ли для каждого дня турнира можно выбрать команду, которая победила в этот день, так, чтобы выбранные команды не повторялись?

8. Имеются 27 карточек с числами от 1 до 27. Двое показывают фокус. Первый получает четыре карточки, выбранные зрителем. Одну из них он убирает, а три оставшиеся выкладывает в ряд. Второй должен узнать спрятанную карточку. Могут ли они договориться так, чтобы по выложенным карточкам можно было узнать спрятанную?

9. Фокусник с помощником собираются показать такой фокус. Зритель пишет на доске последовательность из N цифр. Помощник закрывает две соседние цифры черным кружком. Затем входит фокусник. Его задача – отгадать обе закрытые цифры (и порядок, в котором они расположены). При каком наименьшем N фокусник может договориться с помощником так, чтобы фокус гарантированно удался?