

- 1. Теорема Микеля.** На сторонах AB , BC и CA отмечены точки C_1 , A_1 и B_1 соответственно. Описанные окружности треугольников AB_1C_1 и A_1BC_1 пересекаются в точке M . Докажите, что точки A_1 , B_1 , C и M лежат на одной окружности.
- 2.** Точка M – середина дуги AB окружности ω . Хорды MC и MD пересекают отрезок AB в точках F и E соответственно. Докажите, что четырёхугольник $CDEF$ вписанный.
- 3.** Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ продолжения сторон AB и DC за точки B и C пересекаются в точке E , а продолжения сторон CB и DA за точки B и A пересекаются в точке F . Докажите, что биссектрисы углов AFB и BEC перпендикулярны друг другу.
- 4.** Окружности Γ и Ω пересекаются в точках M и K . Через точки M и K проведены прямые AB и CD , соответственно, пересекающие Γ в точках A и C , а Ω – в точках B и D . Докажите, что прямые AC и BD параллельны.
- 5.** Вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон AC и AB в точках B_1 и C_1 . Биссектрисы углов B и C пересекают прямую B_1C_1 в точках D и E соответственно. Докажите, что четырёхугольник $BCDE$ вписанный.
- 6.** Окружность ω_1 касается окружности ω_2 в точке A_{12} , окружность ω_2 касается окружности ω_3 в точке A_{23} , окружность ω_3 касается окружности ω_4 в точке A_{34} , наконец, окружность ω_4 касается окружности ω_1 в точке A_{41} . Все указанные касания внешние. Докажите, что четырёхугольник $A_{12}, A_{23}, A_{34}, A_{41}$ вписанный.
- 7.** Окружность ω с центром I вписана в треугольник ABC и касается сторон AB и BC в точках P и R соответственно. Докажите, что основание M перпендикуляра, опущенного из точки C на прямую AI лежит на прямой PR .

8. Лемма Архимеда. Две окружности касаются внутренним образом в точке S . Хорда AB большей окружности касается меньшей окружности в точке P . Докажите, что луч SP делит угол ASB пополам.

9. Прямая Симсона. Из точки X опустили перпендикуляры XA_1 , XB_1 и XC_1 на три прямые BC , CA и AB соответственно. Докажите, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда точки X, A, B, C лежат на одной окружности.

10. Точки A, B и C лежат на одной прямой, точка P — вне этой прямой. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников ABP , BCP , ACP и точка P лежат на одной окружности.

11. Точка Микеля. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ продолжения сторон AB и DC за точки B и C пересекаются в точке E , а продолжения сторон CB и DA за точки B и A пересекаются в точке F . Докажите, что:

- (а) описанные окружности треугольников ABF , CDF , BCE и ADE пересекаются в одной точке (назовём её M);
- (б) центры указанных четырёх окружностей лежат на одной окружности с точкой M .

12. Замкнутая ломаная $A_1A_2A_3A_4A_5$ пересекает каждое своё звено по два раза. Для каждого i от 1 до 5 через w_i обозначим окружность, описанную около треугольника, вершины которого — A_i и по одной ближайшей к ней точке пересечения на каждом из звеньев, выходящих из A_i . Через B_{ij} обозначим точку пересечения окружностей w_i и w_j , не являющуюся точкой пересечения звеньев ломаной. Докажите, что точки w_{14} , w_{42} , w_{25} , w_{53} и w_{31} лежат на одной окружности.