

Принцип Дирихле в геометрии

1. В правильном 101-угольнике провели все диагонали. Выбирали наугад какие-то N диагоналей. При каком наименьшем N среди выбранных диагоналей наверняка найдутся две, имеющие одинаковую длину?
2. Докажите, что в любом выпуклом многограннике найдутся две грани с одинаковым числом сторон.
3. В квадрате со стороной 1 отметили 51 точку. Докажите, что хотя бы три из отмеченных точек можно покрыть кругом радиуса $1/7$.
4. На сфере даны пять точек. Докажите, что некоторые четыре из них лежат на замкнутой полусфере.
5. Петя нарисовал окружность и отметил на ней 25 точек. Потом Вася провел какие-то 6 отрезков с концами в этих точках. Докажите, что после этого Петя сможет провести ещё один такой отрезок, не имеющий общих точек ни с одним из проведённых.
6. Внутри выпуклого $2n$ -угольника взята точка P . Через каждую вершину многоугольника и точку P проведена прямая. Докажите, что найдётся сторона многоугольника, с которой ни одна из проведённых прямых не имеет общих внутренних точек.
7. Докажите, что любой выпуклый $2n$ -угольник имеет диагональ, не параллельную ни одной из его сторон.
8. Внутри квадрата со стороной 1 нарисовано несколько окружностей, сумма длин которых равна 10. Докажите, что найдётся прямая, пересекающая по крайней мере четыре из этих окружностей.
9. На окружности радиуса 1 отмечены несколько дуг

общей длины 2. Докажите, что в окружность можно вписать правильный треугольник так, чтобы никакая вершина не попала на эти дуги.

10. Фрёкен Бок испекла квадратный торт размером 3×3 . Карлсон вырезал себе из него четыре квадратных куса размером 1×1 со сторонами, параллельными сторонам торта (не обязательно по линиям сетки 3×3). После этого Малыш вырезал себе из оставшейся части торта квадратный кусок со сторонами, также параллельными сторонам торта. На какой наибольший кусок торта может рассчитывать Малыш вне зависимости от действий Карлсона?

11. Известно, что в кадр фотоаппарата, расположенного в точке O , не могут попасть предметы A и B такие, что угол AOB больше 179° . На плоскости поставлено 1000 таких фотоаппаратов. Одновременно каждым фотоаппаратом делают по одному снимку. Доказать, что найдётся снимок, на котором сфотографировано не больше 998 фотоаппаратов.

12. Каждая точка плоскости покрашена в один из трёх цветов. Докажите, что найдутся две точки одного цвета, расстояние между которыми равно 1.

13. Выпуклый многоугольник содержит $n^2 + 1$ точку с целыми координатами. Докажите, что среди них найдётся хотя бы $n + 1$ точка, лежащая на одной прямой.

14. На плоскости отметили $n^2 + 1$ точку. Докажите, что среди отмеченных точек можно выбрать $n + 1$ точку, никакие три из которых не являются вершинами остроугольного треугольника.