1. Дан четырехугольник $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O. Докажите, что $AD \parallel BC$ тогда и только тогда, когда $S_{AOB} = S_{COD}$.

2. На сторонах AD и CD параллелограмма $ABCD$ выбраны точки Q и P соответственно. Докажите, что площадь пересечения треугольников ABP и BQC равна суммарной площади частей параллелограмма, не лежащих ни в одном из треугольников.

3. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка P. Оказалось, что радиусы вписанных окружностей треугольников BAP и CAP равны. Докажите, что тогда радиусы вневписанных окружностей этих треугольников, касающихся отрезков BP CP соответственно также равны.

4. В четырехугольнике $ABCD$ сумма углов $\angle BAD + \angle CDA = 90°$, M — середина BC, $AB = 2$, $CD = 6$. Найдите $S_{ABM} + S_{DMC} - S_{AMD}$.

5. **Лемма о ласточкином хвосте.** На стороне BC треугольника ABC выбрана точка P, а на отрезке AP точка Q. Докажите, что $S_{ABQ} : S_{ACQ} = BP : CP$.

6. На сторонах AB и AC равностороннего треугольника ABC выбраны точки X и Y соответственно. Отрезки CX и BY пересекаются в точке O. Оказалось, что $S_{BOC} = S_{AXOY}$. Чему может быть равен угол BOC?

7. (рис.1) Найдите отношение площади шестиугольника к площади закрашенной области.

8. (рис.2) Найдите отношение площади закрашенной области к площади незакрашенной области.

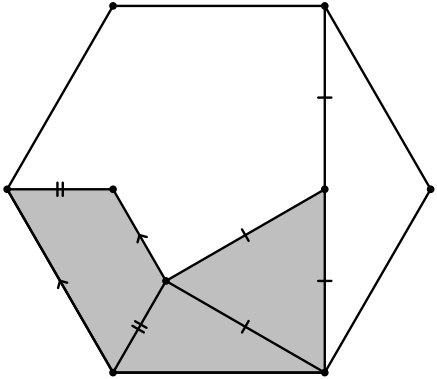


рис. 1

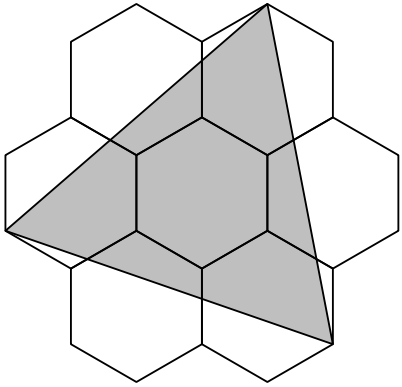


рис. 2