НОД и НОК

1. Применим алгоритм Евклида к числам a и $b \in \mathbb{N}$:

0) $a = bq_0 + r_1$, $\quad \ldots$

1) $b = r_1q_1 + r_2$, $\quad n-1)$ $r_{n-2} = r_{n-1}q_{n-1} + r_n$,

2) $r_1 = r_2q_2 + r_3$, $\quad n)$ $r_{n-1} = r_nq_n$.

Докажите, что

a) $\text{НОД}(a, b) = r_n$ (r_n – последний ненулевой остаток);

b) $au + bv = \text{НОД}(a, b)$ для некоторых u и $v \in \mathbb{Z}$.

2. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Сократима ли дробь $\frac{2n^2-1}{n+1}$?

3. a) Докажите, что если произведение ab натуральных чисел a и b делится на простое число p, то на p делится хотя бы одно из чисел a и b.

b) Докажите, что любое целое число $n \geq 2$ можно разложить в произведение простых, и это разложение единственно с точностью до порядка множителей.

4. Докажите, что $\text{НОД}(a, b) \cdot \text{НОК}(a, b) = a \cdot b$, $\forall a, b \in \mathbb{N}$.

5. Пусть a, n и $m \in \mathbb{N}$. Докажите, что

a) $\text{НОД}(a^n - 1, a^m - 1) = a^{\text{НОД}(n,m)} - 1$ при $a > 1$;

b) $\text{НОД}(a^{2^n} + 1, a^{2^m} + 1) \leq 2$, если $n \neq m$.

6. Можно ли с помощью циркуля и линейки разделить угол 19° на 19 равных частей?

7. В прямоугольнике с целыми сторонами a и b, нарисованном по линиям клетчатой бумаги, проведена диагональ. Через какое число узлов она проходит?

8. Дано 10 натуральных чисел $a_1 < a_2 < \ldots < a_{10}$. Докажите, что $\text{НОК}(a_1, a_2, \ldots, a_{10}) \geq 10a_1$.

9. Последовательность натуральных чисел a_1, a_2, ... такова, что $\text{НОД}(a_i, a_j) = \text{НОД}(i, j)$ для всех $i \neq j$. Докажите, что $a_i = i$ для всех $i \in \mathbb{N}$.