Неравенство Йенсена

1. Дана выпуклая на интервале I функция f. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – произвольные числа из интервала I, а $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – произвольные положительные числа, сумма которых равна 1. Докажите, что
$$f\Big(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\Big) \le \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \ldots + \lambda_n f(x_n).$$

2. Пусть α, β, γ – углы треугольника. Докажите, что
$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \le \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

3. Пусть a, b, $c > 0$ и $a + b + c = 1$. Докажите, что
$$\Big(1 + \frac{1}{a}\Big)\Big(1 + \frac{1}{b}\Big)\Big(1 + \frac{1}{c}\Big) \ge 64.$$

4. Пусть a, b, c – неотрицательные числа. Докажите, что $\sqrt{a^2+1} + \sqrt{b^2+1} + \sqrt{c^2+1} \ge \sqrt{6(a+b+c)}$.

5. Пусть x, y, $z > 0$. Докажите, что
$$x^5y + y^5z + z^5x \ge x^2y^3z + y^2z^3x + z^2x^3y.$$

6. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n > 0$ докажите, что
$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(a_i + b_i)} \ge \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} + \sqrt[n]{b_1b_2\ldots b_n}.$$

7. Для точки P внутри треугольника ABC через x, y, z обозначим расстояния от неё до прямых BC, CA, AB соответственно. Найдите точку P, для которой достигается минимум суммы $BC/x + CA/y + AB/z$.

8. (`Поповичу`) Дана выпуклая на интервале I функция f. Докажите, что $f(x) + f(y) + f(z) + 3f\big(\frac{x+y+z}{3}\big) \ge$ $\ge 2\Big(f\big(\frac{x+y}{2}\big) + f\big(\frac{y+z}{2}\big) + f\big(\frac{z+x}{2}\big)\Big)$ для любых x, y, $z \in I$.

9. Для произвольных чисел x, y, $z \in \mathbb{R}$ докажите, что

a) $|x|+|y|+|z|-|x+y|-|y+z|-|z+x|+|x+y+z| \ge 0$;

b) $x^6 + y^6 + z^6 + 3x^2y^2z^2 \ge 2(x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3)$.