

Формула и неравенство Абеля

1. Докажите, что для произвольных действительных чисел a_1, a_2, \dots, a_n и b_1, b_2, \dots, b_n выполнено равенство $a_1 b_1 + \dots + a_n b_n = (a_1 - a_2) b_1 + (a_2 - a_3)(b_1 + b_2) + \dots + (a_{n-1} - a_n)(b_1 + \dots + b_{n-1}) + a_n(b_1 + \dots + b_n)$.

2. Пусть $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 0$. Докажите, что для произвольных чисел b_1, b_2, \dots, b_n верны неравенства

$$a_1 \min_k \sum_{i=1}^k b_i \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \leq a_1 \max_k \sum_{i=1}^k b_i.$$

3. а) Даны числа a_1, a_2, \dots, a_n такие, что $a_1 \leq 1$, $a_1 + a_2 \leq 2$, \dots , $a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq n$. Докажите, что $\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \dots + \frac{a_n}{n} \leq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$.

б) Пусть $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ — инъективное отображение. Докажите, что для произвольного $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство $\frac{f(1)}{1^2} + \frac{f(2)}{2^2} + \dots + \frac{f(n)}{n^2} \geq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$.

4. а) Даны положительных числа x_1, x_2, \dots, x_n и y_1, y_2, \dots, y_n такие, что $x_1 y_1 \leq x_2 y_2 \leq \dots \leq x_n y_n$ и $x_1 + \dots + x_k \geq y_1 + y_2 + \dots + y_k$ при $1 \leq k \leq n$. Докажите, что $x_1^{-1} + x_2^{-1} + \dots + x_n^{-1} \leq y_1^{-1} + y_2^{-1} + \dots + y_n^{-1}$.

б) Конечное множество S натуральных чисел таково, что у любых двух его различных подмножеств различные суммы элементов. Докажите, что сумма обратных величин элементов множества S меньше 2.

5. На плоскости нарисована ломаная $P_0 P_1 \dots P_n$ такая, что ориентированные углы $\angle P_0 P_1 P_2$, $\angle P_1 P_2 P_3$, \dots , $\angle P_{n-2} P_{n-1} P_n$ равны и выполнены неравенства

$$P_0 P_1 > P_1 P_2 > \dots > P_{n-1} P_n.$$

Может ли быть так, что $P_0 \equiv P_n$?