Теория Рамсея

1. Докажите, что для произвольных натуральных чисел $s_1, \ldots, s_n$ число Рамсея $R(s_1, ..., s_n)$ существует и удовлетворяет неравенству $R(s_1, ..., s_n) \leq C_{s_1+...+s_n-n}^{s_1-1,...,s_n-1}$.

2. В компании из 17 учёных каждый переписывается по почте со всеми остальными. В письмах между учёными обсуждается три научных статьи. Каждая пара учёных в своей переписке обсуждает ровно одну статью. Докажите, что можно выбрать трёх учёных, которые пишут друг другу об одной и той же статье.

3. Во множестве натуральных чисел выбрали бесконечное количество конечных подмножеств одинаковой мощности. Докажите, что можно выбрать 100 из них так, чтобы любые два различных подмножества пересекались по одному и тому же количеству элементов.

4. Докажите, что для любого $k \in \mathbb{N}$ существует такое $n \in \mathbb{N}$, что для произвольной раскраски элементов множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ в k цветов, найдётся три различных одноцветных числа x, y и z такие, что $x+y = z$.

5. Пусть p, q, $k \in \mathbb{N}$ (где p, $q \geq k$). Докажите, что существует число n такое, что при любой раскраске всех k-подмножеств n-элементного множества в чёрный или белый цвет, найдётся или p-элементное подмножество со всеми k-подмножествами белыми, или q-элементное подмножество со всеми k-подмножествами чёрными.

6. Докажите, что найдётся такое $n \in \mathbb{N}$, что среди любых n точек на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой, можно выбрать 10 точек, которые являются вершинами выпуклого 10-угольника.