Перестановки

1. a) Докажите, что любая перестановка раскладывается в произведение непересекающихся циклов.

b) Перестановка σ равна произведению непересекающихся циклов с длинами $c_1, c_2, \ldots, c_m$. Докажите, что в любом разложении перестановки σ в произведение транспозиций, т. е. циклов длины два, количество множителей хотя бы $(c_1 - 1) + (c_2 - 1) + \ldots + (c_m - 1)$.

2. У Лены есть колода из 52 игральных карт и любимый способ её тасовать. Однажды Лена взяла колоду и старательно перетасовала её 52! раз (каждый раз одним и тем же способом). Докажите, что карты в колоде оказались разложены в исходном порядке.

3. Даны два многочлена $P(x)$ и $Q(x)$ с целыми коэффициентам. Оказалось, что при всех целых x значение $P\big(Q(x)\big) - x$ делится на 100. Докажите, что при всех целых x значение $Q\big(P(x)\big) - x$ тоже делится на 100.

4. a) Найдите все $n \in \mathbb{N}$, для которых существует перестановка $\sigma \in S_n$ такая, что любая другая перестановка из S_n равна некоторой степени перестановки σ.

b) Придумайте две перестановки, такие, что их композициями можно получить любую перестановку.

5. Пара $i < j$ называется *инверсией* в перестановке $\sigma \in S_n$, если $\sigma(i) > \sigma(j)$. *Чётность перестановки* – чётность числа инверсий в ней. Докажите, что

a) при умножении слева перестановки на транспозицию число инверсий меняет чётность;

b) только (не)чётные перестановки представимы в виде произведения (не)чётного числа транспозиций.

6. Докажите, что любая чётная перестановка раскладывается в произведение циклов длины три.
7. Назовём перестановку $\tau \in S_n$ *квадратной*, если она представима в виде $\tau = \sigma \circ \sigma$ для некоторой перестановки σ. Каких перестановок чисел от 1 до 100 больше, квадратных или не квадратных?
8. В некотором городе разрешаются только парные обмены квартир (если две семьи обмениваются квартирами, то в тот же день они не имеют права участвовать в другом обмене). Докажите, что любой обмен квартирами можно осуществить за два дня.
9. Десять карточек с числами от 1 до 10 положили в ряд в некотором порядке. За ход можно поменять местами две соседние карточки. За какое наименьшее число ходов можно всегда получить ряд из карточек, идущих слева направо в порядке возрастания? Тот же вопрос, но можно менять местами любые две карточки.
10. Можно ли в игре "15" переставить две фишки с номерами 14 и 15, оставив остальные фишки на месте?
11. В ресторане есть n юношей, n девушек и n пронумерованных столов. За каждым столом сидят один юноша и одна девушка. На каждом столе написано, за какой стол должен пересесть сидящий за ним юноша и за какой стол сидящая за ним девушка. Каждые пять минут все посетители ресторана пересаживаются в соответствии с номерами, указанными на их столах. При каких n можно так написать числа на столах, что в итоге каждый юноша посидит с каждой девушкой и каждый из пришедших посидит за каждым столом?