# 1 Полезные леммы/теоремы

1. **(Теорема Микеля)** Пусть $ABC$ — треугольник с произвольными точками $A_0$, $B_0$ и $C_0$ на сторонах $BC$, $CA$ и $AB$ соответственно (или их продолжениях). Тогда описанные окружности $\Delta AB_0C_0$, $\Delta A_0BC_0$ и $\Delta A_0B_0C$ пересекаются в одной точке.
2. **(Теорема о бабочке)** Пусть $M$ — середина хорды $PQ$ окружности $\omega$, через которую проведены две другие хорды $AB$ и $CD$. Пусть $AD \cap PQ = X$ и $BC \cap PQ = Y$ . Тогда $M$ также является серединой $XY$.
3. **(Задача №255)** Пусть $M$ и $N$ — точки касания вписанной окружности со сторонами $BC$ и $BA$ треугольника $ABC$, $K$ — точка пересечения биссектрисы угла $A$ с прямой $MN$. Тогда $\angle AKC = 90°$, и середины сторон $AB$, $AC$ и точка $K$ лежат на одной прямой. (что будет для вневписанной окружности?)
4. **(Shooting lemma)** Пусть $M$ — середина дуги $AB$ окружности $\omega$. $X$ — произвольная точка окружности. $K = MX \cap AB$. Тогда $MA^2 = MX \cdot MK = MB^2$. (что будет, если взять ещё точку $Y$ на окружности?)
5. **(Лемма о трезубце)** Пусть $I$ и $I_A$ — центры вписанной и вневписанной (касающейся стороны $BC$ и продолжений сторон $AB$ и $AC$) окружностей треугольника $ABC$ соответственно. Тогда точки $B$, $C$, $I$, $I_A$ лежат на одной окружности с центром в середине «меньшей» дуги $BC$ описанной окружности треугольника $ABC$. (очевидно есть ещё одна такая "хорошая"окружность)
6. **(no name)** Пусть вписанная окружность треугольника $ABC$ касается стороны $BC$ в точке $D$, и пусть $DT$ — диаметр этой окружности. Если прямая $AT$ пересекает $BC$ в точке $X$, то $BD = CX$.

# 2 Задачи

1. Пусть $ABC$ — остроугольный треугольник с $AB \neq AC$. Окружность с диаметром $BC$ пересекает стороны $AB$ и $AC$ в точках $M$ и $N$ соответственно. Обозначим через $O$ середину стороны $BC$. Биссектрисы углов $\angle BAC$ и $\angle MON$ пересекаются в точке $R$. Докажите, что описанные окружности треугольников $BMR$ и $CNR$ имеют общую точку, лежащую на стороне $BC$.
2. Пусть $I$ и $O$ — центр вписанной и описанной окружностей треугольника $ABC$ соответственно, а $s_a$ — внешняя биссектриса угла $\angle BAC$. Прямая, проходящая через $I$ и перпендикулярная $IO$, пересекает прямые $BC$ и $s_a$ в точках $P$ и $Q$ соответственно. Докажите, что $IQ = 2IP$.
3. Окружность $\omega$ с центром O касается окружности $\Omega$ и хорды $AB$ этой окружности. $M$ – середина дуги $AB$. $C$ и $D$ такие точки на $AB$, что $MC \perp AO$ и $MD \perp OB$. Докажите, что $AB = 2 \cdot CD$.
4. Пусть $ABC$ — остроугольный треугольник с ортоцентром $H$, и пусть $W$ — точка на стороне $BC$, лежащая строго между $B$ и $C$. Точки $M$ и $N$ являются основаниями высот из $B$ и $C$ соответственно. Обозначим через $\omega_1$ — описанную окружность $BWN$, и пусть $X$ — точку на $\omega_1$ такую, что $WX$ — диаметр $\omega_1$. Аналогично, обозначим через $\omega_2$ описанную окружность треугольника $CWM$, и пусть $Y$ — точку, такую, что $WY$ — диаметр $\omega_2$. Докажите, что $X$, $Y$ и $H$ лежат на одной прямой.
5. Пусть $O$ — центр описанной окружности, а $H$ — ортоцентр остроугольного треугольника $ABC$, причем $BC > CA$. Пусть $F$ — основание высоты $CH$ треугольника $ABC$. Перпендикуляр к прямой $OF$ в точке $F$ пересекает прямую $AC$ в точке $P$. Докажите, что $\angle FHP = \angle BAC$.
6. Дан треугольник $ABC$, удовлетворяющий условию $AC + BC = 3 \cdot AB$. Вписанная окружность треугольника $ABC$ имеет центр $I$ и касается сторон $BC$ и $CA$ в точках $D$ и $E$ соответственно. Пусть $K$ и $L$ — симметричные $D$ и $E$ относительно $I$. Докажите, что точки $A$, $B$, $K$, $L$ лежат на одной окружности.

7. Пусть $ABC$ — треугольник с инцентром $I$ и центром вневписанной окружности $I_A$. Пусть $M$ — середина дуги $BC$, не содержащей $A$, и пусть $N$ — середина дуги $MBA$. Прямые $NI$ и $NI_A$ пересекают описанную окружность $ABC$ в точках $S$ и $T$. Докажите, что прямые $ST$, $BC$ и $AI$ пересекаются в одной точке.

8. Дан треугольник $ABC$ с ортоцентром $H$. Проведены высоты $AA_1$ и $CC_1$. На $AC$ нашлась такая точка $L$, что отрезки $A_1L$ и $C_1L$ делятся высотами пополам. Докажите, что $HL \perp OH$.

9. Точки $H$ и $I$ — ортоцентр и центр вписанной окружности остроугольного треугольника $ABC$. Пусть $D$ — проекция точки $I$ на прямую $BC$, а точка $E$ симметрична точке $A$ относительно точки $I$. Далее, пусть $F$ — проекция точки $H$ на прямую $ED$. Докажите, что точки $B$, $H$, $F$ и $C$ лежат на одной окружности.

10. Пусть $ABC$ — неравнобедренный треугольник с центром вписанной окружности $I$, вписанная окружность которого касается $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ в точках $D$, $E$, $F$ соответственно. Обозначим через $M$ середину $\overline{BC}$. Пусть $Q$ — точка на вписанной окружности такая, что $\angle AQD = 90^\circ$. Пусть $P$ — точка внутри треугольника на прямой $AI$, для которой $MD = MP$. Докажите, что либо $\angle PQE = 90^\circ$, либо $\angle PQF = 90^\circ$.

11. Пусть $ABC$ — треугольник с центром вписанной окружности $I$. Точка $P$ внутри треугольника удовлетворяет условию
$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$
Покажите, что $AP \geq AI$, и что равенство выполняется тогда и только тогда, когда $P = I$.

12. Для треугольника $ABC$ точка $J$ является центром вневписанной окружности, противоположной вершине $A$. Эта вневписанная окружность касается стороны $BC$ в точке $M$, а прямых $AB$ и $AC$ — в точках $K$ и $L$ соответственно. Прямые $LM$ и $BJ$ пересекаются в точке $F$, а прямые $KM$ и $CJ$ пересекаются в точке $G$. Пусть $S$ — точка пересечения прямых $AF$ и $BC$, а $T$ — точка пересечения прямых $AG$ и $BC$. Докажите, что $M$ — середина $ST$.

13. Для вписанного четырехугольника $ABCD$ обозначим через $L$, $M$ – центры вписанных окружностей треугольников $ABC$, $BCD$ соответственно. Пусть $R$ – точка пересечения перпендикуляров из точек $L$, $M$ на диагонали $AC$ и $BD$ соответственно. Докажите, что $\Delta LMR$ – равнобедренный.

14. Для данного треугольника $ABC$ пусть $X$ — переменная точка на прямой $BC$ такая, что $C$ лежит между $B$ и $X$, а вписанные окружности треугольников $ABX$ и $ACX$ пересекаются в двух различных точках $P$ и $Q$. Докажите, что прямая $PQ$ проходит через точку, не зависящую от выбора точки $X$.

15. Треугольник $ABC$ вписан в окружность $\omega$. Окружность с хордой $BC$ пересекает отрезки $AB$ и $AC$ снова в точках $S$ и $R$ соответственно. Отрезки $BR$ и $CS$ пересекаются в точке $L$, а лучи $LR$ и $LS$ пересекают $\omega$ в точках $D$ и $E$ соответственно. Биссектриса внутреннего угла $\angle BDE$ пересекает прямую $ER$ в точке $K$. Докажите, что если $BE = BR$, то $\angle ELK = \frac{1}{2}\angle BCD$.

16. Пусть вписанная окружность $\omega$ треугольника $\Delta ABC$ касается сторон $AC$ и $AB$ в точках $E$ и $F$ соответственно. Точки $X$, $Y$ окружности $\omega$ таковы, что $\angle BXC = \angle BYC = 90^\circ$. Докажите, что $EF$ и $XY$ пересекаются на средней линии треугольника $ABC$.

17. Пусть $ABC$ — треугольник с центром вписанной окружности $I$, а $D$ — произвольная точка на стороне $BC$. Пусть прямая, проходящая через $D$ и перпендикулярная $BI$, пересекает $CI$ в точке $E$. Пусть прямая, проходящая через $D$ и перпендикулярная $CI$, пересекает $BI$ в точке $F$. Докажите, что точка, симметричная $A$ относительно прямой $EF$, лежит на прямой $BC$.