1 Степень точки

Для начала введём понятие степени точки A относительно окружности ω:
$P(A, \omega) = AO^2$ - R^2.
Очевидно, что когда точка лежит вне окружности, её степень положительная, когда внутри - отрицательная, а когда на окружности - равна 0. Тогда выведем несколько очевидных свойств:

1. Степень точки относительно окружности можно вывести по формулам на доске.
2. Пусть дан четырёхугольник $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке E (внутри). Докажите, что он вписанный тогда и только тогда, когда $AE \cdot EC = BE \cdot ED$.
3. Посмотрите на случай, когда E находится вне четырёхугольника и выведите аналогичный критерий-свойство.

2 Радикальные оси

Теперь познакомимся с понятием радикальной оси двух окружностей:
Радикальной осью двух окружностей называется множество точек, каждая из которых имеет равные степени относительно этих окружностей. Нетрудно догадаться, что это почти всегда прямая (1). Опять же докажем несколько очевидных вещей:

1. Всегда ли радикальная ось – непустое множество точек?
2. Докажите свойство (1) и покажите, какая это прямая для пересекающихся окружностей.
3. Докажите, что прямая, соединяющая центры окружностей, перпендикулярна радикальной оси.

3 Радикальный центр

Радикальный центр трёх окружностей - точка пересечения трёх радикальных осей пар окружностей. Опять же докажем несколько очевидных вещей:

1. Существует ли радикальный центр и единственен ли он?
2. Бывает, что окружности не пересекаются. Придумайте, как построить их радикальную ось, зная, что такое радикальный центр.

4 Упражнения

1. В единичном квадрате $ABCD$ вписанная окружность ω пересекает CD в точке M, а AM пересекает ω в точке P, отличной от M. Найдите значение AP.
2. Пусть ω и γ — две окружности, пересекающиеся в точках P и Q. Пусть их общая внешняя касательная касаются ω в точке A и γ в точке B. Докажите, что PQ проходит через середину M отрезка AB.
3. Дан треугольник ABC. На сторонах AB, BC, и CA отметили точки F, D и E соответственно так, чтобы $BCEF$ был вписанным. Пусть P - вторая точка пересечения описанных окружностей BDF и DCE. Докажите, что A, P и D лежат на одной прямой.

4. Пусть ABC - остроугольный треугольник и пусть D - основание высоты из вершины A. Точка H лежит на AD. Докажите, что H - ортоцентр ABC тогда и только тогда, когда $DB \cdot DC = AD \cdot HD$.

5 Задачи

1. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны M и E так, что $ME||BC$. Докажите, что окружности с диаметрами BE и CM пересекаются на прямой, проходящей через точку A и перпендикулярной BC.

2. Пусть H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC. Окружность Γ_A с центром в середине BC, проходящая через H, пересекает BC в точках A_1 и A_2. Аналогично определены точки B_1, B_2, C_1 и C_2. Докажите, что шесть точек A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 и C_2 лежат на одной окружности.

3. Пусть Γ описанная окружность треугольника ABC. D - точка на стороне BC. Касательная к Γ в точке A пересекают прямую, параллельную AB и проходящую через D в точке E. CE пересекает Γ повторно в F. Оказалось, что $BDFE$ - вписанный. Докажите, что AC, BF и DE пересекаются в одной точке.

4. Пусть $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ — концентрические окружности, причём $\mathcal{C}_2$ находится внутри $\mathcal{C}_1$. Из точки A окружности $\mathcal{C}_1$ проведём касательную AB к $\mathcal{C}_2$ ($B \in \mathcal{C}_2$). Пусть C — вторая точка пересечения AB и $\mathcal{C}_1$, а D — середина AB. Прямая, проходящая через A, пересекает $\mathcal{C}_2$ в точках E и F таким образом, что серединные перпендикуляры к DE и CF пересекаются в точке M на прямой AB. Найдите AM/MC.

5. Пусть ABC — треугольник с центром описанной окружности O. Точки P и Q отмечены на CA и AB соответственно. Пусть K, L и M — середины отрезков BP, CQ и PQ соответственно. Предположим, что прямая PQ касается окружности (KLM). Докажите, что $OP = OQ$.

6. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω. H и O – ортоцентр и центр описанной окружности соответственно. Пусть M и N — середины сторон AB и AC соответственно. Лучи MH и NH пересекают ω в точках P и Q соответственно. MN и PQ пересекаются в точке R. Докажите, что $OA \perp RA$.

7. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, $AC = BC$. На продолжении луча AB за B выбрана точка P. Окружность, описанная около ACD, снова пересекает отрезок PD в точке Q. Окружность, описанная около треугольника APQ, пересекает отрезок PC в точке R. Докажите, что прямые CD, AQ, BR пересекаются в одной точке.

8. Пусть ABC — треугольник с центроидом G. На лучах GB и GC выбраны точки R и S соответственно так, что
$$\angle ABS = \angle ACR = 180^\circ - \angle BGC.$$
Докажите, что $\angle RAS + \angle BAC = \angle BGC$.

9. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB, BC и CA в точках C_1, A_1 и B_1, соответственно. Точки D и E – середины отрезков A_1B_1 и A_1C_1, соответственно. Прямые B_1E и C_1D пересекают вписанную окружность во второй раз в точках F и G, соответственно. Докажите, что точки B, F, G и C лежат на одной окружности.