1 1-ый воробей

1. **(Первый воробей)** На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки C_0 и A_0 соответственно, W — середина дуги ABC описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что равенство $AC_0 = CA_0$ выполняется тогда и только тогда, когда точки A_0, C_0, W и B лежат на одной окружности.
2. Дан четырёхугольник $ABCD$, у которого $AB = CD$, $\angle BAD = 70°$ и $\angle CDA = 50°$. M и N – середины сторон AD и BC. Найдите $\angle AMN$.
3. Пусть A_0, B_0 и C_0 — точки касания вневписанных окружностей со сторонами BC, CA и AB треугольника ABC соответственно. Описанные окружности треугольников A_0B_0C, AB_0C_0 и A_0BC_0 пересекают второй раз описанную окружность треугольника ABC в точках C_1, A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику, образованному точками касания вписанной окружности треугольника ABC с его сторонами.

2 2-ой воробей

1. **(Второй воробей)** На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки C_0 и A_0 соответственно, I — центр вписанной окружности в ABC. Докажите, что окружность, описанная около треугольника A_0BC_0, проходит через I тогда и только тогда, когда $AC_0 + CA_0 = AC$.
2. На стороне AC треугольника ABC отметили точку K. Пусть I_1 и I_2 – инцентры ABK и CBK. D – точка касания вписанной окружности треугольника ABC со стороной AC. Докажите, что $\angle I_1DI_2 = 90°$.
3. На стороне AC треугольника ABC отметили произвольную точку D. Точки E и F симметричны точке D относительно биссектрис углов A и C соответственно. Докажите, что середина отрезка EF лежит на прямой A_0C_0, где A_0 и C_0 — точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами BC и AB соответственно.
4. Точки A_1, B_1, C_1 лежат на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC соответственно. Предположим, что $AB_1 - AC_1 = CA_1 - CB_1 = BC_1 - BA_1$. Пусть I_A, I_B и I_C — центры окружностей, вписанных в треугольники AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C соответственно. Докажите, что центр описанной окружности около треугольника $I_AI_BI_C$ совпадает с центром вписанной окружности треугольника ABC.

3 Перевёрнутый воробей

1. **(Перевернутый воробей)** На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки C_0 и A_0 соответственно, I — центр вписанной окружности в ABC и M – середина дуги BC. Пусть K – такая точка на луче BM, что $BK = IM$. Докажите, что окружность, описанная около треугольника A_0BC_0, проходит через K тогда и только тогда, когда $BC_0 + BA_0 = AC$.
2. В треугольнике W – середина дуги BC. Точка X на BC такова, что $\angle WXC = 90 - \frac{\angle C}{2}$, а Y на AB такова, что $XY \| WA$. Покажите, что $BX + BY = AC$.

4 1+2 воробьи

1. В неравнобедренном треугольник ABC сторона AB короче стороны BC, W является серединой дуги ABC описанной окружности треугольника ABC, I — центром вписанной окружности, M — серединой стороны AC. Докажите, что $\angle IWB = \angle IMA$.

2. Дан неравнобедренный треугольник ABC. Пусть N — середина дуги BAC его описанной окружности, а M — середина стороны BC. Обозначим через I_1 и I_2 центры вписанных окружностей треугольников ABM и ACM соответственно. Докажите, что точки I_1 , I_2 , A, N лежат на одной окружности.

5 Домашнее задание

4. (2 воробей) Точки A_1, B_1, C_1 лежат на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC соответственно. Предположим, что $AB_1 - AC_1 = CA_1 - CB_1 = BC_1 - BA_1$. Пусть O_A, O_B и O_C — центры описанных окружностей треугольников AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C соответственно. Докажите, что центр вписанной окружности треугольника $O_AO_BO_C$ является также центром вписанной окружности треугольника ABC.

2. (1 воробей) Пусть A_0, B_0 и C_0 — точки касания вневписанных окружностей со сторонами BC, CA и AB треугольника ABC. Докажите, что центр описанной окружности около треугольника $A_0B_0C_0$ лежит на описанной окружности треугольника ABC тогда и только тогда, когда треугольник ABC прямоугольный.

3. (Перевернутый воробей) Дан треугольник ABC. B-вневписанная и C-вневписанная окружности касаются AC и AB соответственно в точках T_2 и T_3. D и E лежат на AC и AB так, что $AD = AE = \frac{BC}{2}$. Доказать, что середина T_2T_3 лежит на DE.