Малая теорема Ферма

1. Пусть p простое и $a \in \mathbb{Z}$. Докажите, что $a^p - a \vdots p$.

2. Пусть p — простое число больше пяти. Докажите, что число, записанное $p-1$ единицей делится на p.

3. Пусть a – натуральное число, не делящееся на 17. Докажите, что ровно одно из чисел a^8+1, a^4+1, a^2+1, $a+1$, $a-1$ делится на 17.

4. Докажите, что $2^{2^p}-4 \vdots 2^p-1$ при любом простом p.

5. Докажите, что $101 \nmid k^2+k+1$ для любого $k \in \mathbb{Z}$.

6. **a)** Число a^2+b^2, где a и $b \in \mathbb{Z}$, делится на простое число p вида $4k+3$. Докажите, что $a \vdots p$ и $b \vdots p$.

b) Разрешимо ли уравнение $y^2 = x^3 + 7$ в целых x, y?

7. Докажите, что для составного числа 561 справедлив аналог малой теоремы Ферма: если НОД$(a, 561) = 1$, то $a^{560} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 561)$. (Числа, обладающие этим свойством, называются *числами Кармайкла.*)

8. Найдите все натуральные числа, которые взаимно просты со всеми членами бесконечной последовательности $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$, $n \geq 1$.

9. Докажите, что ни для какого натурального n число $2^n - 1$ не делится на n.

10. Учитель физкультуры проводит зарядку для 47 детей следующим образом. Он даёт команду сделать шаг вперед первым 23 школьникам, а затем размещает их между последними 24: первого ставит между 24 и 25, второго – между 25 и 26, третьего – между 26 и 27, и так далее. С получившимся строем он произведёт ту же операцию. Докажите, что после 46-го перестроения дети выстроятся в первоначальном порядке.