Остатки и сравнения по модулю

1. Даны целые числа a, b, c, d и натуральное число n такие, что $a \equiv c \pmod{n}$ и $b \equiv d \pmod{n}$. Докажите, что $a \pm b \equiv c \pm d \pmod{n}$ и $ab \equiv cd \pmod{n}$.

2. Даны натуральные взаимно простые числа a и n.

a) Докажите, что все остатки при делении на n чисел из набора a, $2a$, $\ldots$, na попарно различные.

b) Докажите, что в наборе чисел $a-1$, a^2-1, $\ldots$, a^n-1 хотя бы одно из чисел делится на n.

3. Докажите, что **a)** $3^{100}-2^{100} \,\vdots\, 13$; **b)** $43^{101}+34^{101} \,\vdots\, 77$.

4. Докажите, что для любого натурального числа n **a)** $11 \cdot 4^{2n+1}+1 \,\vdots\, 15$; **b)** $2^{5n+3}+5^n \cdot 3^{n+2} \,\vdots\, 17$.

5. Докажите, что среди любых 13 целых чисел найдутся два, разность квадратов которых делится на 23.

6. Докажите, что в последовательности 11, 111, 1111, $\ldots$ нет квадрата натурального числа.

7. Целые числа a, b и c таковы, что $a^3+b^3+c^3$ делится на 7. Докажите, что abc делится на 7.

8. Найдите все пары натуральных чисел m и n такие, что **a)** $3^m+7=2^n$; **b)** $1!+2!+\ldots+n!=m^2$.

9. Можно ли среди чисел $\frac{100}{1}$, $\frac{99}{2}$, $\ldots$, $\frac{1}{100}$ выбрать пять, произведение которых равнялось бы единице?

10. Существует ли степень двойки, из которой перестановкой цифр можно получить другую степень двойки? (Цифру 0 ставить на первое место нельзя.)

11. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ дают все остатки при делении на n, числа $b_1, b_2, \ldots, b_n$ дают все остатки при делении на n. При каких n может быть так, что числа a_1+b_1, $a_2+b_2, \ldots, a_n+b_n$ дают все остатки при делении на n?