Неравенства о средних

1. Пусть x_1, x_2, $\ldots$, $x_n > 0$. Докажите, что

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}} \le \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n} \le$$

$$\le \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \le \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}}.$$

2. $a, b, c \in \mathbb{R}$. Докажите, что $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$.

3. Произведение положительных чисел x_1, x_2, $\ldots$, x_n равно 1. Докажите, что $(2+x_1)(2+x_2)\ldots(2+x_n) \ge 3^n$.

4. Пусть x, y, $z > 0$ и $x+y+z=1$. Докажите, что

$$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-y}+\frac{1}{1-z} \ge \frac{2}{1+x}+\frac{2}{1+y}+\frac{2}{1+z}.$$

5. При каком $x \in [0,1]$ произведение $x(1-x)^{99}$ принимает наибольшее значение?

6. Для положительных чисел a, b, c докажите, что

a) $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \ge a+b+c$; **b)** $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}$;

c) $abc \ge (a+b-c)(b+c-a)(a+c-b)$

d) $a^3+b^3+c^3 \ge a^2b+b^2c+c^2a$.

7. Решите уравнение $x^9+x^{-9}=1+x^{10}$.

8. Радиус вписанной окружности треугольника равен 1. Найдите наименьшее возможное значение суммы высот этого треугольника.

9. У каждого жителя города есть свои тараканы, при этом не у всех их поровну. Два таракана являются *товарищами*, если у них общий хозяин (в частности, каждый таракан сам себе товарищ). Что больше: среднее количество тараканов, которыми владеет житель города, или среднее количество товарищей у таракана?