НОД и НОК

1. Применим алгоритм Евклида к числам a и $b \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{llll} 0) & a = bq_0 + r_1, & & \dots \\ 1) & b = r_1q_1 + r_2, & n-1) & r_{n-2} = r_{n-1}q_{n-1} + r_n, \\ 2) & r_1 = r_2q_2 + r_3, & n) & r_{n-1} = r_nq_n. \end{array}$$

Докажите, что

a) НОД$(a, b) = r_n$ (r_n – последний ненулевой остаток);

b) $au + bv =$ НОД(a, b) для некоторых u и $v \in \mathbb{Z}$.

2. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Сократима ли дробь $\frac{2n^2-1}{n+1}$?

3. a) Докажите, что если произведение ab натуральных чисел a и b делится на простое число p, то на p делится хотя бы одно из чисел a и b.

b) Докажите, что любое целое число $n \geq 2$ можно разложить в произведение простых, и это разложение единственно с точностью до порядка множителей.

4. Докажите, что НОД$(a, b)\cdot$НОК$(a, b) = a\cdot b$, $\forall a, b \in \mathbb{N}$.

5. Пусть a, n и $m \in \mathbb{N}$. Докажите, что

a) НОД$(a^n - 1, a^m - 1) = a^{\text{НОД}(n,m)} - 1$ при $a > 1$;

b) НОД$(a^{2^n} + 1, a^{2^m} + 1) \leq 2$, если $n \neq m$.

6. Можно ли с помощью циркуля и линейки разделить угол 19° на 19 равных частей?

7. В прямоугольнике с целыми сторонами a и b, нарисованном по линиям клетчатой бумаги, проведена диагональ. Через какое число узлов она проходит?

8. Дано 10 натуральных чисел $a_1 < a_2 < \ldots < a_{10}$. Докажите, что НОК$(a_1, a_2, \ldots, a_{10}) \geq 10a_1$.

9. Последовательность натуральных чисел a_1, a_2, … такова, что НОД$(a_i, a_j) =$ НОД(i, j) для всех $i \neq j$. Докажите, что $a_i = i$ для всех $i \in \mathbb{N}$.