ММИ в алгебраических задачах

1. Для произвольного натурального n докажите, что

a) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

b) $1 \times 1! + 2 \times 2! + \ldots + n \times n! = (n+1)! - 1$.

2. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Найдите формулы для сумм:

a) $1 + 3 + \ldots + (2n-1)$; **b)** $\dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + \ldots + \dfrac{n-1}{n!}$.

3. Пусть $x_1 = 2$ и $x_{n+1} = 3x_n + 2$. Найдите формулу для элементов последовательности $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

4. Докажите, что $\sqrt{6 + \ldots + \sqrt{6 + \sqrt{6}}} < 3$, где в левой части неравенства записано 100 шестёрок.

5. Докажите, что $3^n > n^3$ при всех целых $n \geq 4$.

6. Докажите, что при любом $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство

$$\frac{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times 2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

7. Числа x_1, x_2, …, $x_n \geq -1$ одного знака. Докажите, что $(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n$.

8. Для любого натурального n докажите, что

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n} - 1.$$

9. Известно, что $x + 1/x$ – целое число. Докажите, что $x^n + 1/x^n$ также является целым при любом $n \in \mathbb{N}$.

10. Докажите, что для любых целых чисел x_1, x_2, …, x_n произведение $(1+x_1^2)(1+x_2^2)\ldots(1+x_n^2)$ представимо в виде суммы квадратов двух целых чисел.

11. Рассмотрим все возможные наборы чисел из множества $\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$, не содержащие двух соседних чисел. Докажите, что сумма квадратов произведений чисел в этих наборах равна $(n+1)! - 1$.