Парочка вспомогательных утверждений

Везде далее через $\mathcal{L}_X$ будет обозначать множество всех прямых, которые проходят через точку X.

1. **(Лемма Соллертинского)**. На плоскости даны точки X и Y. Предположим, что прямые $\ell_X(t) \in \mathcal{L}_X$ и $\ell_Y(t) \in \mathcal{L}_Y$ вращаются проективно вокруг точек X и Y, соответственно. Тогда точка пересечения прямых $\ell_X(t)$ и $\ell_Y(t)$ движется проективно по некоторой конике, которая проходит через X и Y, либо по прямой (прямая получается в случае, когда $\ell_X(t)$ и $\ell_Y(t)$ проезжают прямую XY одновременно).
2. Докажите, что изогональный образ прямой, не проходящей через вершины треугольника — это коника, проходящая через вершины. Изогональным образом какой прямой будет являться описанная окружность?

Проективные инволюции

Инволюцией называется отображение $f : M \mapsto M$ из произвольного множетсва M в себя, при всех $x \in M$ удовлетворяющее $f(f(x)) = x$. *Проективная инволюция* — это такое отображение f из прямой/пучка прямых/коники в себя, что f — инволюция, и f — сохраняет двойные отношения.

3. Пусть $\mathcal{P}$ прямая или коника. Пусть $f : \mathcal{P} \mapsto \mathcal{P}$ сохраняет двойные отношения и существуют $A, B \in \mathcal{P}$, такие что $f(A) = B$ и $f(B) = A$. Докажите, что f является проективной инволюцией.
4. Докажите, что любая проективная инволюция на прямой ℓ это инверсия в некоторой её точке, возможно с отражением.
5. Докажите, что для любой инволюции f на конике $\mathcal{C}$ есть точка P такая, что f переводит A во вторую точку пересечения прямой PA и $\mathcal{C}$.

Теорема Дезарга об Инволюции

6. **(Сильное ТДИ)**. Даны четыре точки A, B, C и D общего положения и прямая ℓ, не проходящая через них. Тогда существует такая проективная инволюция $f : \ell \mapsto \ell$, что если P и Q — точки пересечения ℓ и произвольной коники через точки A, B, C и D, то $f(P) = Q$.
7. **(ТДИ)**. Пусть $ABCD$ четырехугольник вписанный в конику $\mathcal{C}$. Прямая ℓ пересекает прямые AB, CD, AD, BC, AC, BD в точках X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2 и пересекает $\mathcal{C}$ в точках W_1 и W_2. Тогда существует инволюция $f : \ell \mapsto \ell$, меняющая местами пары точек $X_1 \leftrightarrow X_2$, $Y_1 \leftrightarrow Y_2$, $Z_1 \leftrightarrow Z_2$, $W_1 \leftrightarrow W_2$.
8. **(ТДИ для двух точек)**. Пусть A и B точки на конике $\mathcal{C}$, прямая ℓ пересекает прямую AB в точке X и касательные к $\mathcal{C}$ в точках A и B в точках Y_1 и Y_2. ℓ пересекает $\mathcal{C}$ в точках W_1 и W_2. Тогда существует инволюция $f : \ell \mapsto \ell$, меняющая местами пары точек $X \leftrightarrow X$, $Y_1 \leftrightarrow Y_2$ и $W_1 \leftrightarrow W_2$.
9. **(ТДИ для трёх точек)**. Пусть треугольник ABC вписан в конику $\mathcal{C}$. Прямая ℓ пересекает прямые AB, AC, BC в точках X_1, X_2, Y_1 и касательную к $\mathcal{C}$ в точке A в Y_2. ℓ пересекает $\mathcal{C}$ в W_1 и W_2. Тогда существует инволюция $f : \ell \mapsto \ell$, меняющая местами пары точек $X_1 \leftrightarrow X_2$, $Y_1 \leftrightarrow Y_2$ и $W_1 \leftrightarrow W_2$.

Как и у любого проективного утверждения у ТДИ так же есть двойственная версия.

10. **(Двойственная ТДИ)**. Пусть P точка и $ABCD$ четырехугольник описанный вокруг коники $\mathcal{C}$. Пусть $E = AB \cap CD$ и $F = AD \cap BC$. Тогда если PX и PY касательные к $\mathcal{C}$, то существует инволюция $f : \mathcal{L}_P \mapsto \mathcal{L}_P$, меняющая местами пары прямых $PX \leftrightarrow PY$, $PA \leftrightarrow PC$, $PB \leftrightarrow PD$, $PE \leftrightarrow PF$.

11. **(Двойственная ТДИ для двух точек)**. Пусть A и B две точки на конике $\mathcal{C}$ и P точка на плоскости. Если касательные к $\mathcal{C}$ в A и B пересекаются в X и пусть PY и PZ касательные к $\mathcal{C}$. Тогда существует инволюция $f : \mathcal{L}_P \mapsto \mathcal{L}_P$, меняющая местами пары прямых $PY \leftrightarrow PZ$, $PX \leftrightarrow PX$, $PA \leftrightarrow PB$.
12. **(Двойственная ТДИ для трёх точек)**. Пусть ABC треугольник со вписанной коникой $\mathcal{C}$, которая касается BC в точке D. Пусть P точка на плоскости. PX и PY касательные из P к $\mathcal{C}$. Тогда существует инволюция $f : \mathcal{L}_P \mapsto \mathcal{L}_P$, меняющая местами пары прямых $PA \leftrightarrow PD$, $PX \leftrightarrow PY$, $PB \leftrightarrow PC$.

Упражнения

13. Дан треугольник $\triangle ABC$, точка P на плоскости и прямая γ, проходящая через P. Пусть A', B', C' точки в которых отражения прямых PA, PB, PC относительно γ пересекают прямые BC, AC, AB соответственно. Докажите, что A', B' и C' лежат на одной прямой.
14. Пусть AB, CD и PQ хорды окружности, которые пересекаются в точке M. Пусть $X = PQ \cap AD$ и $Y = PQ \cap BC$. Тогда если $MP = MQ$, то $MX = MY$.
15. Даны треугольник ABC и две точки P и Q на плоскости, такие что AP и AQ изогонали относительно $\angle A$. Пусть $X = PB \cap QC$ и $Y = PC \cap QB$. Докажите, что AX и AY так же изогонали относительно $\angle A$.
16. Пусть ABC треугольник. Общие касательные к его описанной и $A-$вневписанной окружности пересекают прямую BC в точках P и Q. Докажите, что AP и AQ изогонали относительно $\angle A$.

Задачи

17. На плоскости дан треугольник $\triangle ABC$ и переменная точка P. Касательные из P ко вписанной окружности пересекают прямую BC в точках X и Y. Прямая AP повторно пересекает описанную окружность треугольника $\triangle ABC$ в точке K. Докажите, что (KXY) проходит через фиксированную точку плоскости.
18. Пусть ABC и DEF два треугольника, которые имеют общую вписанную окружность ω и описанную окружность Ω. Пусть ω касается прямых BC и EF в точках K и L соответственно. Пусть $N = AL \cap \Omega$ и $M = DK \cap \Omega$. Докажите, что прямые AM, DN, EF и BC пересекаются в одной точке.

Очень сложные задачи

19. Пусть Γ — описанная окружность $\triangle ABC$. Пусть ω — вневписанная окружность, противоположная A, а I_a — её центр. Прямые ℓ и γ - общие касательные к Γ и ω. Пусть a' - отражение BC относительно I_a. Пусть X и Y пересечение ℓ и γ с a'. Докажите, что существует окружность, проходящая через X, Y и касающаяся AB, AC и Γ.
20. Пусть $ABCD$ вписанный четырехугольник и M_1, M_2, M_3, M_4 середины отрезков AB, BC, CD и DA соответственно. Пусть E точка пересечения диагоналей AC и BD. E_1 изогонально сопряжена E в треугольнике $\triangle M_1CD$. Аналогично определим E_2, E_3 и E_4. Пусть E_1E_3 и E_2E_4 пересекаются в точке W. Докажите, что прямая Гаусса четырёхугольника $ABCD$ делит отрезок EW пополам.
21. Дан треугольник $\triangle ABC$ с ортоцентром H и инцентром I. Точки P и Q выбраны на плоскости так, что P и Q изогонально сопряжены относительно $\triangle ABC$. Прямые IP и IQ пересекают BC в точках X и Y соответственно. Пусть M середина дуги BC описанной окружности, не содержащей A. Оказалось, что $\angle XIY = \angle XMY = 90°$. Докажите, что HI касается описанной окружности треугольника $\triangle PIQ$.