

## Теорема Кронекера

1. (Кронекер) Докажите, что любая подгруппа группы  $(\mathbb{R}, +)$  либо циклическая, либо плотная в  $\mathbb{R}$ .
2. Докажите, что множество  $\{\sin n : n \in \mathbb{N}\}$  плотно на отрезке  $[-1, 1]$ .
3. Докажите, что для любого натурального числа  $A$  найдётся натуральное число  $n$  такое, что десятичная запись числа  $3^n$  начинается с  $A$ .
4. Конечное число отрезков на прямой покрасили в белый цвет. Сумма длин покрашенных отрезков меньше  $1 + \sqrt{2}$ . В одной из белых точек сидит кузнечик. Он умеет прыгать по прямой на 1 влево или на  $\sqrt{2}$  вправо. Докажите, что кузнечик не сможет всё время оставаться на белой части прямой.
5. Докажите, что последовательность  $([n\sqrt{2003}])_{n \in \mathbb{N}}$  содержит сколь угодно длинную геометрическую прогрессию со сколь угодно большим знаменателем.
6. Множество точек  $S$  на плоскости инвариантно относительно отражений от сторон некоторого правильного пятиугольника  $P$ . Докажите, что множества  $S$  плотно на плоскости.
7. Найдите все непрерывные функции  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  такие, что для любых  $x, y \in \mathbb{R}$  верно равенство
$$f(2x - y) + f(2y - x) + 2f(x + y) = 9f(x) + 9f(y).$$
8. Дана последовательность,  $n$ -ый член которой есть первая цифра числа  $2^n$ . Рассмотрим 13-значные числа, записанные тринадцатью идущими подряд цифрами этой последовательности. Докажите, что имеется ровно 57 различных чисел такого вида.