

Теорема Кронекера

1. (Кронекер) Докажите, что любая подгруппа группы $(\mathbb{R}, +)$ либо циклическая, либо плотная в \mathbb{R} .
2. Докажите, что множество $\{\sin n : n \in \mathbb{N}\}$ плотно на отрезке $[-1, 1]$.
3. Докажите, что для любого натурального числа A найдётся натуральное число n такое, что десятичная запись числа 3^n начинается с A .
4. Конечное число отрезков на прямой покрасили в белый цвет. Сумма длин покрашенных отрезков меньше $1 + \sqrt{2}$. В одной из белых точек сидит кузнечик. Он умеет прыгать по прямой на 1 влево или на $\sqrt{2}$ вправо. Докажите, что кузнечик не сможет всё время оставаться на белой части прямой.
5. Докажите, что последовательность $([n\sqrt{2003}])_{n \in \mathbb{N}}$ содержит сколь угодно длинную геометрическую прогрессию со сколь угодно большим знаменателем.
6. Множество точек S на плоскости инвариантно относительно отражений от сторон некоторого правильного пятиугольника P . Докажите, что множества S плотно на плоскости.
7. Найдите все непрерывные функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что для любых $x, y \in \mathbb{R}$ верно равенство
$$f(2x - y) + f(2y - x) + 2f(x + y) = 9f(x) + 9f(y).$$
8. Дана последовательность, n -ый член которой есть первая цифра числа 2^n . Рассмотрим 13-значные числа, записанные тринадцатью идущими подряд цифрами этой последовательности. Докажите, что имеется ровно 57 различных чисел такого вида.