Отношение эквивалентности

1. Дано симметричное, транзитивное бинарное отношение R на множестве S. Оказалось, что для любого $x \in S$ существует $y \in S$ такой, что xRy. Докажите, что R – отношение эквивалентности.

2. Сколько существует отношений эквивалентности на 4-элементном множестве?

3. Множество $U \subset \mathbb{R}$ называется *открытым*, если для любого его элемента $x \in U$ найдётся такое $\varepsilon > 0$, что $(x-\varepsilon; x+\varepsilon) \subset U$. Докажите, что произвольное открытое множество действительной прямой является объединением не более чем счётного числа попарно непересекающихся интервалов.

4. Бесконечное (счётное) число мудрецов стоят в ряд. На каждого надели колпак одного из двух цветов: белый, чёрный. Мудрец с номером n видит всех перед собой: от $n+1$ до бесконечности, но не видит свой колпак и колпаки мудрецов с меньшими номерами. Мудрецы пытаются отгадать свой цвет. Каждый пишет цвет, который ему кажется, на бумаге. Как договориться мудрецам, чтобы лишь конечное число из них ошиблись.

5. Пусть $G = (V, E)$ – граф с n вершинами без p-клик, имеющий наибольшее возможное число рёбер. Скажем, что две вершины u и v эквивалентны, если они не соединены ребром, т. е. $u \sim v \Leftrightarrow (u, v) \notin E$. Докажите, что введённое отношение действительно является отношением эквивалентности.

6. (`Лагранж`) Докажите, что в конечной группе порядок любой её подгруппы делит порядок группы.