Дискретное вероятностное пространство

1. События A и B независимые. Докажите, что события $\overline{A}$ и $\overline{B}$ также независимые.

2. При двух бросаниях игрального кубика вероятность того, что выпадает одинаковое число очков, равна $\frac{1}{6}$. Докажите, что кубик правильный, т.е. все числа от 1 до 6 выпадают равновероятно.

3. Докажите, что из попарной независимости событий A_1, A_2, A_3 не следует независимость в совокупности.

4. Даны события $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Докажите, что

a) $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \ldots$

b) $P(\bigcap_{i=1}^n A_i) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n| \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i)$ при условии, что $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$.

5. Пусть $B_1, B_2, \ldots, B_n$ образуют полную группу событий и $P(B_i) > 0$. Докажите, что для любого события A верно равенство $P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i) \cdot P(B_i)$.

6. (`Байес`) Пусть $P(A) > 0$ и $P(B) > 0$. Докажите, что

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}.$$

7. Каким по счёту студент должен идти сдавать экзамен, чтобы с наибольшей вероятностью ему достался знакомый билет, если он выучил лишь k билетов из n?

8. В некоторой семье двое детей (рождение девочки и мальчика равновероятны). Какова вероятность того, что из них один мальчик и одна девочка? Известно, что **a)** один из детей – мальчик; **b)** один из детей – мальчик и он родился в понедельник. Какова теперь вероятность того, что в семье разнополые дети?