Композиция гомотетий

1. Докажите, что композиция двух гомотетий с коэффициентами k_1 и k_2, является параллельным переносом, если $k_1k_2 = 1$, а иначе – гомотетией с коэффициентом k_1k_2, причём её центр лежит на прямой, соединяющей центры двух данных гомотетий.

2. Две окружности ω_1, ω_2 одинакового радиуса пересекаются в разных точках X_1, X_2. Окружность ω касается окружности ω_1 снаружи в точке Y_1 и касается окружности ω_2 внутри в точке Y_2. Докажите, что прямые X_1Y_1, X_2Y_2 пересекаются в точке, лежащей на ω.

3. Окружности S_1, S_2, S_3 касаются внешним образом окружности S (в точках A_1, B_1, C_1 соответственно) и двух сторон треугольника ABC (AB и AC, BC и BA, CA и CB соответственно). Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

4. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке P, а лучи AD и BC – в точке Q. Из точек P и Q внутрь углов APD и AQB проведено ещё по два луча, разбивающие четырёхугольник $ABCD$ на девять частей. Известно, что в части, примыкающие к вершинам B, C, D, можно вписать окружность. Докажите, что в часть, примыкающую к вершине A, также можно вписать окружность.

5. Каждую сторону n-угольника в процессе обхода по часовой стрелке продолжили на её длину. Оказалось, что новые концы построенных отрезков служат вершинами правильного n-угольника. Докажите, что исходный n-угольник – правильный.