Телескопические суммы и произведения

1. Для любого натурального $n \in \mathbb{N}$ вычислите суммы:

a) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$; **b)** $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$; **c)** $\sum\limits_{k=1}^{n} k! \cdot k$;

2. Докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ верно равенство

$$\left[\frac{n+1}{2}\right] + \left[\frac{n+2}{2^2}\right] + \ldots + \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right] + \ldots = n.$$

3. Докажите, что

a) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$;

b) для любого целого $n \geq 3$ число $n!$ можно представить в виде суммы n различных его делителей.

4. Докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ верны равенства:

a) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{4k}{4k^4+1} = \frac{2n^2+2n}{2n^2+2n+1}$;

b) $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin 2k = \frac{\cos 1 - \cos(2n+1)}{2\sin 1}$;

c) $\sum\limits_{k=0}^{n} \operatorname{arctg} \frac{1}{k^2+k+1} = \operatorname{arctg}(n+1)$.

5. Докажите, что для любых натуральных чисел $a_0 < < a_1 < \ldots < a_n$ выполнено неравенство $\frac{1}{\text{НОК}(a_0, a_1)} + + \frac{1}{\text{НОК}(a_1, a_2)} + \ldots + \frac{1}{\text{НОК}(a_{n-1}, a_n)} \leq 1 - \frac{1}{2^n}$.

6. Вычислите $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{F_{k-1}F_{k+1}}$, где $F_0 = F_1 = 1$ и $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ при $k \geq 0$ (последовательность Фибоначчи).

7. Для любого натурального числа $n \in \mathbb{N}$ вычислите произведения: **a)** $\prod\limits_{k=0}^{n} (1 + 2^{2^k})$; **b)** $\prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.