Теорема Птолемея

1. (Птолемей) Докажите, что для любых четырех точек A, B, C и D на плоскости выполнено неравенство
$$AB \cdot CD + BC \cdot AD \geq AC \cdot BD,$$
причем равенство достигается тогда и только тогда, когда либо точки A, B, C и D лежат на одной окружности в указанном порядке, либо лежат на одной прямой в указанном порядке (или отличающемся от него циклической перестановкой).

2. (Помпей) Точка P лежит на окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC. Докажите, что сумма расстояний от P до двух вершин треугольника равна расстоянию от P до третьей вершины.

3. (Карно) Пусть d_1, d_2, d_3 – расстояния от центра описанной окружности остроугольного треугольника до его сторон. Докажите, что $d_1 + d_2 + d_3 = R + r$, где R и r – радиусы описанной и вписанной окружностей данного треугольника соответственно.

4. Точка P лежит на описанной окружности квадрата $ABCD$. Докажите, что $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$.

5. Найдите положение точки M внутри остроугольного треугольника ABC, для которой минимальна сумма
$$AM \cdot BM \cdot AB + BM \cdot CM \cdot BC + CM \cdot AM \cdot CA.$$

6. Даны две концентрические окружности радиусов $r < R$. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ вписан в меньшую окружность. Лучи AB, BC, CD и DA пересекают большую окружность в точках C_1, D_1, A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что $\dfrac{P_{A_1B_1C_1D_1}}{P_{ABCD}} \geq \dfrac{R}{r}$.