Первообразные корни

1. Докажите, что 2 – первообразный корень по модулю **а)** 101; **б)** 3^n $(n \in \mathbb{N})$.

2. Число p простое. Для произвольного $d \in \mathbb{N}$ положим $f(d) = |\{x \in \mathbb{Z}_p^*\colon\ \mathrm{ord}_p(x) = d\}|$. Докажите, что

a) $f(d) = \varphi(d)$, если $f(d) \neq 0$;

b) $\sum\limits_{d|(p-1)} f(d) = \sum\limits_{d|(p-1)} \varphi(d) = p - 1$;

c) $f(d) = \varphi(d)$ для любого делителя d числа $p - 1$.

3. Пусть x – первообразный корень по простому модулю p. Докажите, что найдётся такое целое число y, что $x + yp$ – первообразный корень по модулю p^2.

4. Пусть x – первообразный корень по модулю p^2, где p – нечётное простое число. Докажите, что x – первообразный корень по модулю p^k, $k \in \mathbb{N}$.

5. Пусть x – первообразный корень по модулю p^k, где p – нечётное простое число и $k \in \mathbb{N}$. Докажите, что хотя бы одно из чисел x или $x + p^k$ является первообразным корнем по модулю $2p^k$.

6. Докажите, что

a) $2^k \mid x^{2^{k-2}} - 1$ для любых нечётного x и целого $k \geqslant 3$;

b) если n отлично от p^k, $2p^k$ (p – простое, $k \in \mathbb{N}$), то n представимо в виде произведения $n = ab$, где НОД$(a, b) = 1$ и $\varphi(a)$, $\varphi(b)$ – чётные числа;

c) существует первообразный корень по модулю n, если и только если $n = 1, 2, 4, p^k, 2p^k$ (p – нечётное простое, $k \in \mathbb{N}$).

7. Для простого числа p найдите все такие $k \in \mathbb{N}$, что сумма $1^k + 2^k + \ldots + (p - 1)^k$ делится на p.