Степень точки относительно окружности

1. Дан остроугольный треугольник ABC. Окружность с диаметром AB пересекает высоту CC_1 и её продолжение в точках K и L соответственно. Окружность с диаметром AC пересекает высоту BB_1 и её продолжение в точках M и N соответственно. Докажите, что точки K, L, M, N лежат на одной окружности.

2. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL. Описанные окружности треугольников ABL и ACL пересекают отрезки AC и AB в точках E и F соответственно. Докажите, что $BF = CE$.

3. Через центр I вписанной в неравнобедренный треугольник ABC окружности проведена прямая, перпендикулярная прямой AI и пересекающая прямую BC в точке K. Из точки I на прямую AK опущен перпендикуляр ID. Докажите, что точки A, B, C и D лежат на одной окружности.

4. На плоскости даны окружность ω, точка A, лежащая внутри ω, и точка B, лежащая вне ω. Рассматриваются всевозможные треугольники BXY такие, что точки X и Y лежат на ω и хорда XY проходит через точку A. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников BXY лежат на одной прямой.

5. Точки A_1, A_2, A_3 и A_4 не лежат на одной окружности. Пусть O_1 и r_1 – центр и радиус описанной окружности треугольника $A_2A_3A_4$. Точки O_2, O_3, O_4 и числа r_2, r_3, r_4 определяются аналогично. Докажите, что

$$\frac{1}{O_1A_1^2 - r_1^2} + \frac{1}{O_2A_2^2 - r_2^2} + \frac{1}{O_3A_3^2 - r_3^2} + \frac{1}{O_4A_4^2 - r_4^2} = 0.$$