LTE лемма

1. Дано простое число p, целые числа x, y и натуральное число n. Докажите, что если

a) $(x-y) \vdots p$, но $p \nmid x$, $p \nmid y$ и $p \nmid n$, то

$$v_p(x^n - y^n) = v_p(x-y);$$

b) p нечётное, $(x-y) \vdots p$, но $p \nmid x$ и $p \nmid y$, то

$$v_p(x^n - y^n) = v_p(x-y) + v_p(n);$$

b') p и n нечётные, $(x+y) \vdots p$, но $p \nmid x$ и $p \nmid y$, то

$$v_p(x^n + y^n) = v_p(x+y) + v_p(n);$$

c) x и y нечётные, а n чётное, то

$$v_2(x^n - y^n) = v_2(x-y) + v_2(x+y) + v_2(n) - 1.$$

2. Найдите все натуральные числа n такие, что

a) $2^n \mid 3^n - 1$; **b)** $3^n \mid 5^n + 1$.

3. Найдите степень вхождения 1991 в число

$$1990^{1991^{1992}} + 1992^{1991^{1990}}.$$

4. Существую ли натуральные числа x, y, z такие, что

$$x^{2023} + y^{2023} = 7^z?$$

5. При каких натуральных n существуют натуральное a и простое p, для которых $2^p + 3^p = a^n$.

6. Даны положительные действительные числа a и b такие, что числа $a-b$, a^2-b^2, a^3-b^3, … натуральные. Докажите, что a и b – натуральные числа.

7. Задано целое число $k > 1$. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел n, таких что

$$n \mid 1^n + 2^n + \ldots + k^n.$$

8. Существует ли натуральное число n, которое делится ровно на 2000 различных простых чисел и такое, что $2^n + 1$ делится на n? (*Указание:* докажите, что $3^n \mid 2^{3^n} + 1$ для любого натурального n.)