Интерполяционный многочлен Лагранжа

1. Дан набор пар $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$, где все x_i попарно различные. Докажите, что существует единственный многочлен $f \in \mathbb{R}[x]$ степени не более n такой, что $f(x_i) = y_i$ при всех i от 0 до n и этот многочлен задаётся формулой $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} y_i \prod\limits_{j \neq i} \dfrac{x - x_j}{x_i - x_j}$.

2. У некоторого многочлена не все коэффициенты рациональные. Может ли он принимать во всех рациональных точках рациональные значения?

3. Докажите, что если многочлен $f(x)$ степени n принимает целые значения в точках 0, 1, …, n, то он принимает целые значения во всех целых точках.

4. Пусть $\deg P \leq n$ и **a)** $P(i) = 2^i$; **b)** $P(i) = (i+1)^{-1}$ при всех целых i от 0 до n. Найдите $P(n+1)$.

5. Пусть $\deg P = 2n$ и $P(k) = P(-k)$ для всех целых k от 0 до n. Докажите, что $P(x)$ – чётная функция.

6. Целые числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ попарно различные. Докажите, что $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^k / \prod\limits_{j \neq i} (a_i - a_j) \in \mathbb{Z}$ для любого $k \in \mathbb{N}$.

7. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – попарно различные действительные числа. Докажите, что значение выражения $\sum\limits_{i=1}^{n} \prod\limits_{j \neq i} \dfrac{1 - x_i x_j}{x_i - x_j}$ равно остатку от деления n на 2.

8. Пусть $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$. На координатной плоскости отметили точки $A_1\big(f(1); g(1)\big)$, $A_2\big(f(2), g(2)\big)$, …, $A_n\big(f(n), g(n)\big)$. Оказалось, что $A_1 A_2 \ldots A_n$ – правильный n-угольник. Докажите, что степень хотя бы одного из многочленов f и g не меньше чем $n-1$.