

## Эйлеровы пути и циклы

1. а) В графе  $G$  все вершины имеют чётную степень. Докажите, что рёбра графа  $G$  можно ориентировать так, чтобы для каждой вершины число входящих в неё рёбер равнялось числу выходящих.

б) В стране некоторые пары городов соединены дорогами, причём из каждого города выходит ровно 100 дорог. *Пучком* называется набор из 10 дорог, выходящих из одного города. Докажите, что все дороги можно разбить на несколько пучков.

2. В связном графе  $G$  ровно  $k$  вершин с нечётной степенью. Найдите минимальное число непересекающихся по рёбрам маршрутов (путей и циклов), покрывающих все рёбра графа  $G$ .

3. Можно ли выписать по кругу  $2^n$  цифр, каждая из которых 0 или 1, так, чтобы все  $2^n$  последовательностей из  $n$  подряд идущих цифр оказались разными?

4. В некоторой стране из каждого города выходит по 3 железные дороги. Две компании хотят их все приватизировать. Антимонопольный комитет требует, чтобы из каждого города выходили дороги обеих компаний. Докажите, что компании могут договориться так, чтобы требование комитета будет выполнено.

5. Имеется  $4n$  камушков массами  $1, 2, 3, \dots, 4n$ . Каждый из камушков покрашен в один из  $n$  цветов, причём имеется по 4 камушка каждого цвета. Докажите, что камушки можно разделить на две кучи равного суммарного веса так, чтобы в каждой куче было по два камушка каждого цвета.