Теорема Кэзи

1. Окружности $\omega_A(O_1, r_1)$ и $\omega_B(O_2, r_2)$ касаются окружности $\omega(O, R)$ в точках A и B соответственно. Если ω_A и ω_B касаются ω одинаковым (различным) образом, то через $d(\omega_A, \omega_B)$ обозначим расстояние между двумя точками касания их общей внешней (внутренней) касательной. Докажите, что если

a) окружности ω_A и ω_B касаются внутренним образом окружности ω, то $d(\omega_A, \omega_B) = \dfrac{AB}{R}\sqrt{(R - r_1)(R - r_2)}$;

b) окружности ω_A и ω_B касаются внешним образом окружности ω, то $d(\omega_A, \omega_B) = \dfrac{AB}{R}\sqrt{(R + r_1)(R + r_2)}$;

c) окружность ω_A касается окружности ω внутренним образом, а окружность ω_B – внешним образом, то $d(\omega_A, \omega_B) = \dfrac{AB}{R}\sqrt{(R - r_1)(R + r_2)}$.

2. Окружности $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ и ω_D касаются окружности ω соответственно в вершинах A, B, C и D выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что $d(\omega_A, \omega_B) \cdot d(\omega_C, \omega_D) + d(\omega_B, \omega_C) \cdot d(\omega_D, \omega_A) = d(\omega_A, \omega_C) \cdot d(\omega_B, \omega_D)$.

3. Три равные окружности касаются попарно между собой и внутренним образом некоторой окружности ω. Из произвольной точки $M \in \omega$ проведены касательные к эти трём окружностям. Докажите, что сумма двух отрезков касательных равна третьему отрезку.

4. Пусть Ω – окружность, описанная вокруг $\triangle ABC$, а ω – окружность, касающаяся Γ, а также отрезков AB и AC в точках P и Q соответственно. Докажите, что середина отрезка PQ – инцентр треугольника ABC.